

## SEZIONE AUREA

Può capitare di notare l'uguaglianza di due rapporti ad es. :  $10 : 5 = 8 : 4$  oppure :

$$35 : 7 = 10 : 2$$

L'uguaglianza esiste infatti, eseguita l'operazione di divisione, si ottiene :

$$2 = 2 \text{ oppure : } 5 = 5$$

Ebbene, l'UGUAGLIANZA DI DUE RAPPORTI è la definizione di PROPORZIONE

Esistono poi proporzioni particolari dette CONTINUE

$$16 : 8 = 8 : 4 \quad ; \quad 9 : 3 = 3 : 1 \quad ; \quad 16 : 4 = 4 : 1$$

La loro particolarità è di avere uguali i due termini immediatamente a destra e a sinistra dell'uguale, tale termine si chiama MEDIO PROPORZIONALE .

In una proporzione continua può capitare che l'ultimo termine di destra sia pari alla differenza tra il primo a sinistra e quello centrale.

Quando ciò accade si ha un particolare rapporto che si chiama **SEZIONE AUREA**

**Dato un segmento di lunghezza qualsiasi, (che per comodità possiamo prendere uguale all'unità), detta X la sezione aurea, che è media proporzionale, in base alla definizione appena data si ha:**

$$1 : X = X : (1 - X)$$

Da cui è facile ricavare  $X^2 = 1 - X$  che ha come soluzione positiva  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$

$$\phi = 0,61803398875...$$

Che, da adesso, per semplicità chiameremo semplicemente  $\phi$

- Una prima osservazione da proporre è che :  $1/0,6180339887.. = 1,6180339887..$

$$\text{cioè } 1/\phi = 1, \phi$$

$$\text{E poi } (1, \phi)^2 = 2, \phi$$

$$\text{Ed inoltre } \phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \dots = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

La sezione aurea riconosciuta come un rapporto esteticamente piacevole è stata usata come base per la composizione di quadri o di elementi architettonici.

In realtà è dimostrato che la percezione umana mostra una naturale preferenza e predisposizione verso le proporzioni in accordo con la sezione aurea; gli artisti tenderebbero dunque, quasi inconsciamente, a disporre gli elementi di una composizione in base a tali rapporti.

Gli artisti e i matematici del Rinascimento tra cui Leonardo da Vinci, Piero della Francesca, Bernardino Luini e Sandro Botticelli rimasero molto affascinati dalla sezione aurea.

Allora essa era conosciuta come *divina proportione* e veniva considerata quasi la chiave mistica dell'armonia nelle arti e nelle scienze.

*De divina proportione* è anche il titolo del trattato redatto dal matematico rinascimentale Luca Pacioli e illustrato da sessanta disegni di Leonardo da Vinci (1452-1519).

Questo libro è stato pubblicato nel 1509 ed influenzò notevolmente gli artisti ed architetti del tempo, ma anche delle epoche successive.

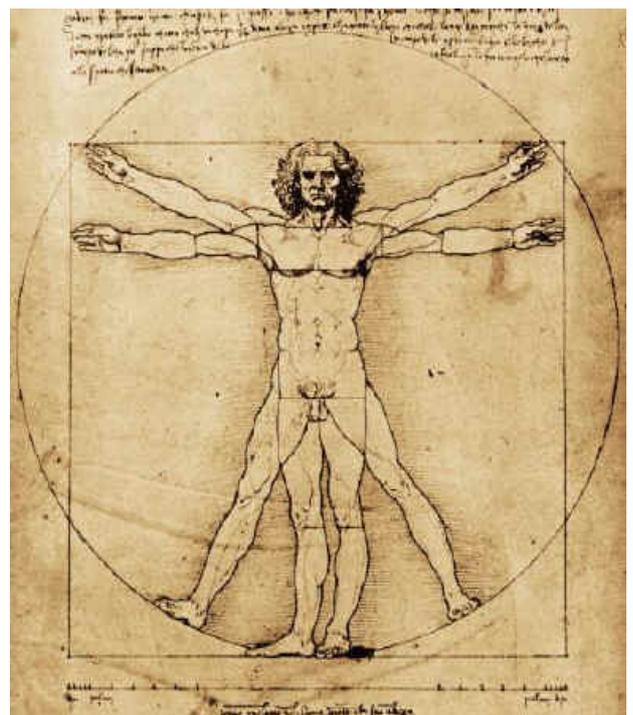
In questo trattato Pacioli ricercò nella proporzione dei numeri i principi ispiratori in architettura, scienza e natura: la regola aurea introdotta fu in seguito chiamata *praxis italica*. L'aggettivo divina si giustifica perché essa ha diversi caratteri che appartengono alla divinità: è unica nel suo genere, è trina perché abbraccia tre termini, indefinibile in quanto è irrazionale, è invariabile.

Utilizzando la sezione aurea nei suoi dipinti Leonardo inoltre scoprì che, guardando le opere, si poteva suscitare un sentimento di ordine.

In particolare Leonardo incorporò il rapporto aureo in tre dei suoi capolavori: **La Gioconda, L'ultima cena e L'Uomo di Vitruvio**.

Nella **Gioconda** il rapporto aureo è stato individuato:

- nella disposizione del quadro
- nelle dimensioni del viso
- nell'area che va dal collo a sopra le mani
- in quella che va dalla scollatura dell'abito fino a sotto le mani.
- Ne **L'Ultima cena**, Gesù, il solo personaggio veramente divino, è dipinto con le proporzioni divine, ed è racchiuso in un rettangolo aureo.
- Ne **L'Uomo**, Leonardo studia le proporzioni della sezione aurea secondo i dettami del *De architectura* di Vitruvio che obbediscono ai rapporti del numero aureo. Leonardo stabilì che le proporzioni umane sono perfette quando l'ombelico divide l'uomo in modo aureo



Ci sono anche altre proprietà interessanti di  $\phi$  per parlare delle quali, però, occorre parlare della serie di Fibonacci, ma, prima di parlare della serie è giusto ed opportuno parlare dell'uomo: Leonardo Fibonacci e del suo valore, cominciando dalla sua biografia

Leonardo Fibonacci, figlio di Guglielmo Bonacci, nacque a Pisa intorno al 1170. Suo padre era segretario della Repubblica di Pisa e responsabile a partire dal 1192 del commercio pisano presso la colonia di Bugia, in Algeria. Alcuni anni dopo il 1192, Bonacci portò suo figlio con lui a Bugia. Il padre voleva che Leonardo divenisse un mercante e così provvide alla sua istruzione nelle tecniche del calcolo, specialmente quelle che riguardavano le cifre indo-arabiche, che non erano ancora state introdotte in Europa. In seguito Bonacci si assicurò l'aiuto di suo figlio per portare avanti il commercio della repubblica pisana e lo mandò in viaggio in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza. Leonardo colse l'opportunità offertagli dai suoi viaggi all'estero per studiare e imparare le tecniche matematiche impiegate in queste regioni. Intorno al 1200, Fibonacci tornò a Pisa dove per i seguenti 25 anni lavorò alle sue personali composizioni matematiche

In tutta la sua produzione l'opera più importante è il "Liber abaci", comparso attorno al 1228: è un lavoro contenente quasi tutte le conoscenze aritmetiche e algebriche ed ha avuto una funzione fondamentale nello sviluppo della matematica dell'Europa occidentale. In particolare la numerazione indo-arabica, che prese il posto di quella latina semplificando notevolmente i commerci extraeuropei, fu conosciuta in Europa tramite questo libro. In tale sistema di numerazione, il valore delle cifre dipende dal posto che occupano: pertanto egli fu costretto ad introdurre un nuovo simbolo, corrispondente allo zero "0", per indicare le posizioni vacanti. La reputazione di Leonardo come matematico divenne così grande che l'imperatore Federico II gli chiese un'udienza mentre era a Pisa nel 1225.

La Repubblica di Pisa gli conferì il titolo di "*Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo*" a riconoscimento dei grandi progressi che apportò alla matematica. Fibonacci morì qualche tempo dopo il 1240, presumibilmente a Pisa. Anche al giorno d'oggi la fama di Leonardo è tale che esiste un'intera pubblicazione dedicata a questi argomenti: il "Fibonacci Quarterly", periodico matematico dedicato interamente all'aritmetica connessa alla sequenza di Fibonacci.

**La serie di Fibonacci** è costituita da una successione di numeri ciascuno dei quali è la somma dei due che lo precedono. Partendo da uno, quindi :

- 1°    2°    3°    4°    5°    6°    7°    8°    9°    10°    11°    ...
- 1    1    2    3    5    8    13    21    34    55    89    ...

Il rapporto tra il successivo e il precedente termine della serie tende al valore della sezione aurea

$$\frac{2}{1}=2; \quad \frac{3}{2} = 1,5 \quad \frac{5}{3} = 1,666; \quad \frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{13}{8} = 1,625; \quad \frac{21}{13} = 1,6153; \quad \frac{34}{21} = 1,619048 \dots\dots$$

Ebbene, continuando con i termini via via crescenti della SdF è a  $\phi$  che tende il loro rapporto.

La S d F ha anche la proprietà secondo la quale, sommando alcuni termini consecutivi di essa a partire dal primo, e aggiungendovi 1 si ha un altro termine della S d F e precisamente quello che segue di due posti l'ultimo della somma.

Esempi:

1° 2° 3° 4° 5°

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 1 = 13 che è il settimo numero della sequenza.

Oppure

1° 2° 3° 4° 5° 6° 7°

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 1 = 34 che è il nono numero della sequenza

Altra proprietà è quella per cui facendo il quadrato di due numeri consecutivi della S d F e sommandoli si ha ancora un numero della S d F che occupa una posizione pari alla somma di quelle dei due numeri di partenza.

Esempi:

$$\begin{array}{ccc} 4^\circ & 5^\circ & 9^\circ \\ 3^2 + 5^2 = 34 & & 6^\circ \quad 7^\circ \quad 13^\circ \\ & & 8^2 + 13^2 = 233 \end{array}$$

Un'applicazione moderna dei numeri di Fibonacci si può riscontrare presso la borsa azionistica di Milano. Prendendo spunto da Leonardo Fibonacci, uno dei più grandi protagonisti della storia della matematica, Ralph Elson Elliot elaborò una teoria di previsione dei mercati finanziari con la quale in tempi recenti sono stati anticipati i più grandi rialzi e i più grandi crolli di borsa.

Usando le onde di Elliot ed i numeri di Fibonacci, il docente universitario G. Migliorino ha previsto con incredibile precisione il punto minimo del drammatico ribasso dell'estate '98.

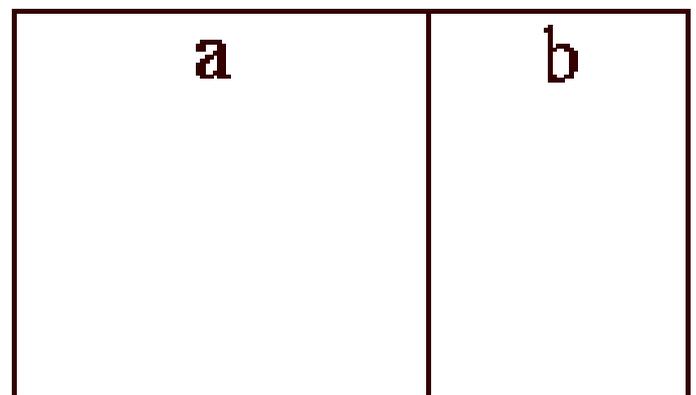
## La geometria e la sezione aurea

Esiste uno speciale rettangolo le cui proporzioni corrispondono alla sezione aurea. Il suo nome è **rettangolo aureo**.

Ovviamente un lato di esso è la sezione aurea dell'altro.

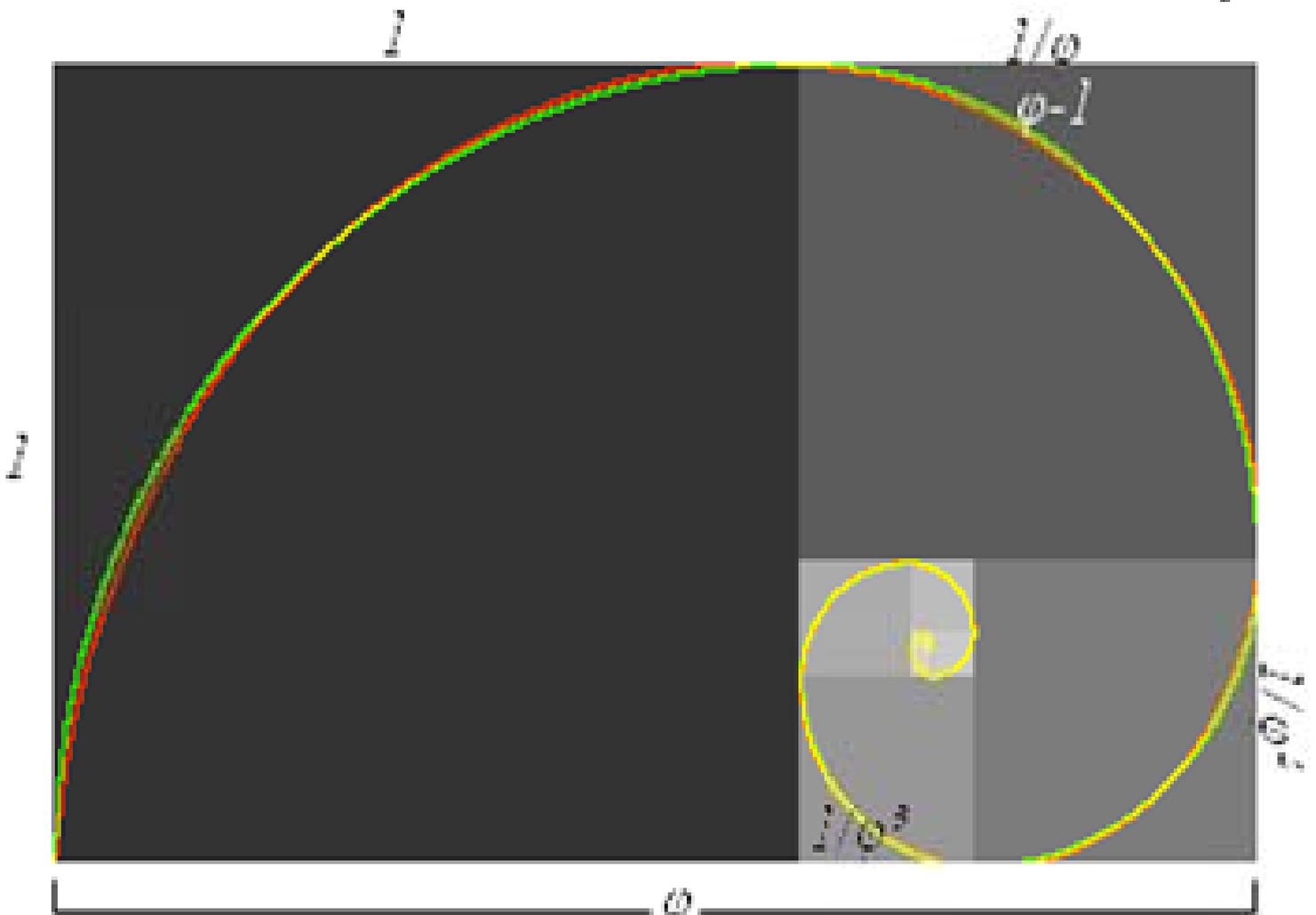
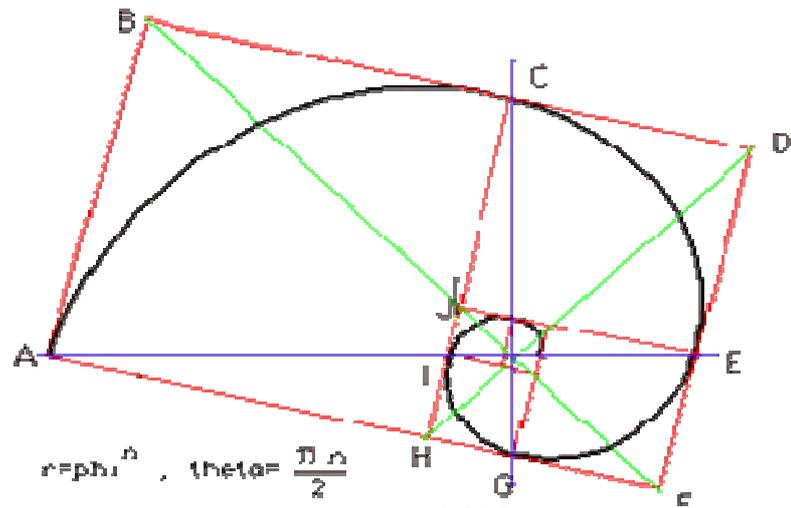
Concretamente se  **$a = \phi$** , allora  **$a+b=1$**

Viceversa, se  **$a = 1$** , allora  **$b = \phi$**



Se all'interno di un rettangolo aureo si disegna un quadrato con lato uguale al lato minore del rettangolo, il rettangolo differenza sarà anch'esso un rettangolo aureo. Si ripeta l'operazione per almeno cinque volte al fine di avere un effetto visivo adeguato.

Si punti la punta del compasso sul vertice del quadrato che giace sul lato lungo del rettangolo e si tracci l'arco che unisce i gli estremi dei due lati che formano l'angolo scelto. Si ripete l'operazione per ogni quadrato disegnato in



Questa curva è nota in geometria come "spirale logaritmica" ed è molto più comune in natura di quanto non si creda: **E' una curva equiangolare** (in tutti i suoi punti l'angolo formato da un raggio e dalla tangente è costante). Per tale motivo la traiettoria seguita da un falco per raggiungere la sua preda è proprio questa spirale. Inoltre la curva gode di proprietà molto particolari: quella invariante, ovvero che la sua forma rimane inalterata indipendentemente dal raggio di quarti di circonferenza che la compongono; e quella per cui, pur essendo di lunghezza finita e quindi misurabile, è illimitata, nel senso che il centro della spirale lo si raggiunge dopo infiniti giri.

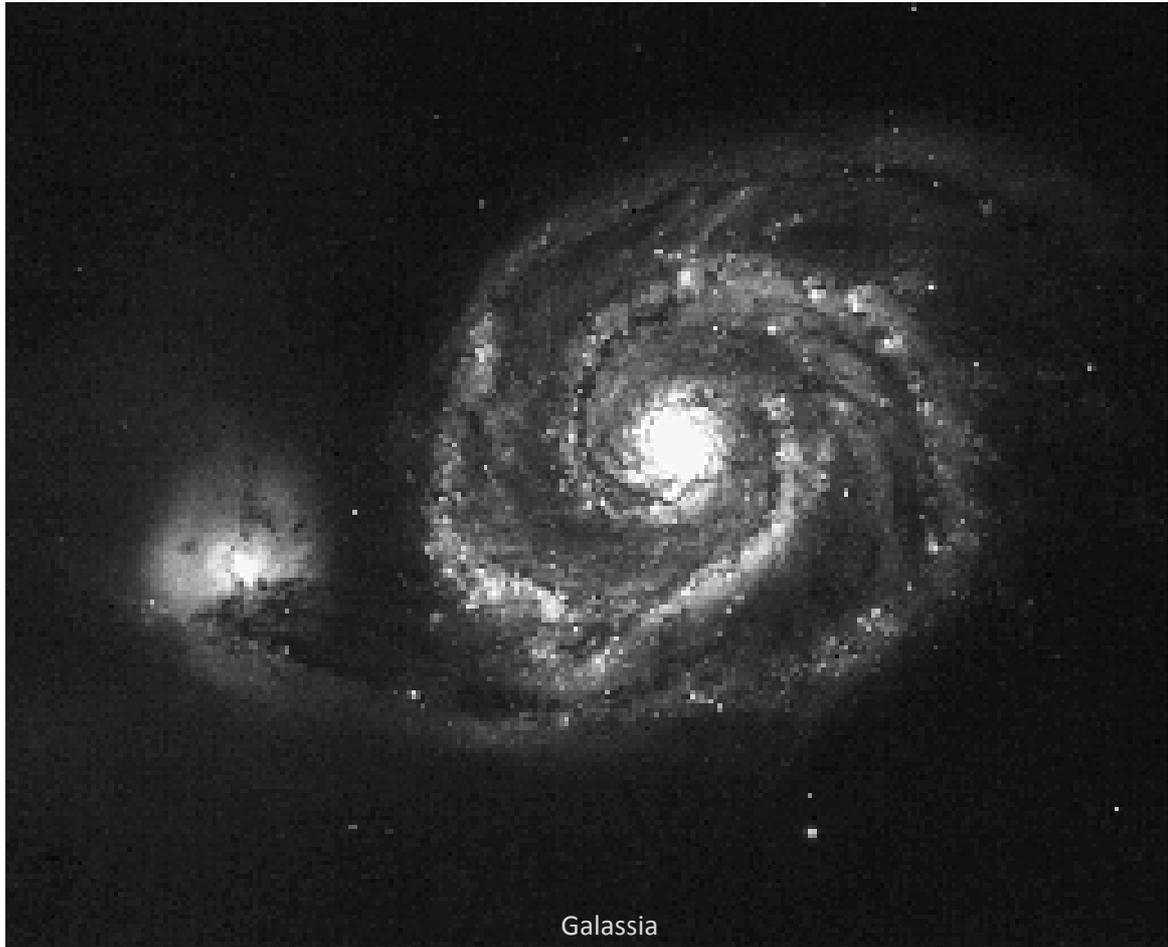
La **spirale logaritmica**, fu scoperta da **Renato Cartesio** nel 1638. Cinquanta anni dopo un altro matematico, JacKob Bernoulli scoprí molte altre sue proprietà, e ne rimase talmente affascinato che richiese di averne una scolpita sulla sua pietra tombale, accompagnata dalla scritta latina "*Eadem mutata resurgo*" (*Sebbene cambiata, rinasco identica*).

**Tale curva si ritrova in natura** in numerosissime manifestazione della vita animale e vegetale, ad esempio nella conchiglia del Nautilus. Le spirali del Nautilus sono costruite sulla struttura della spirale logaritmica. La crescita del mollusco e dell'ampiezza degli strati della conchiglia lascia inalterata la forma, confermando le proprietà invariantive della curva.



Sezione di "NAUTILUS"

**In Astronomia**, le galassie si sviluppano e si strutturano lungo una spirale logaritmica. Osserviamo che le posizioni possono aprirsi o chiudersi, aumentare o diminuire senza che la struttura del movimento si alteri minimamente, e mantenendo la potenza inerente alla propria struttura.

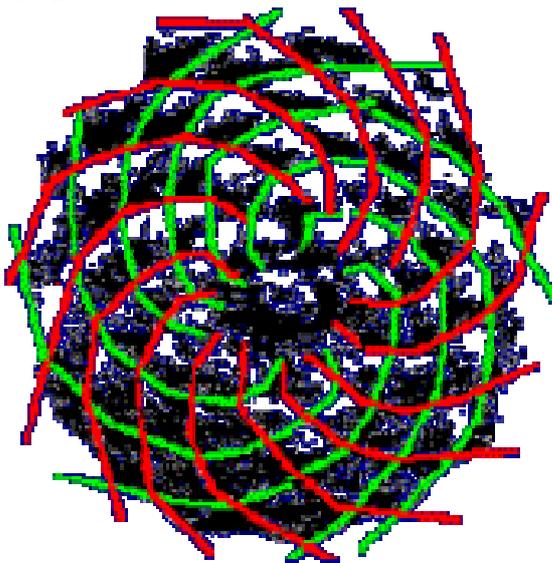


Ma se si volessero complicare le cose, si potrebbe pensare di avvolgere due o più spirali contrapposte partenti dalla stessa origine.

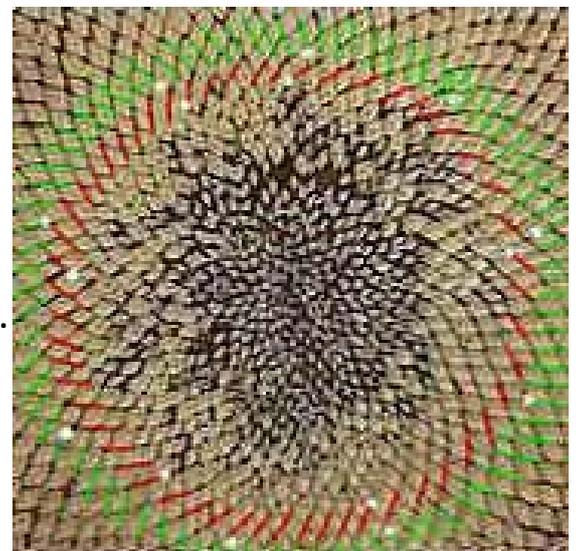
Questa che sembra essere una folle e complicatissima esercitazione teorico matematica è invece...



Una pigna ...



Un girasole.....



MA, VOLENDO, SI POSSONO COMPLICARE

VERAMENTE LE COSE.....

E, poiché di spiegazioni in proposito

non ce ne sono, è meglio...



TORNARE ALLA NORMALE SEMPLICITA'... di ulteriori considerazioni geometriche,

Infatti è importante è l'applicazione del concetto di sezione aurea ai triangoli. Per rendersene conto

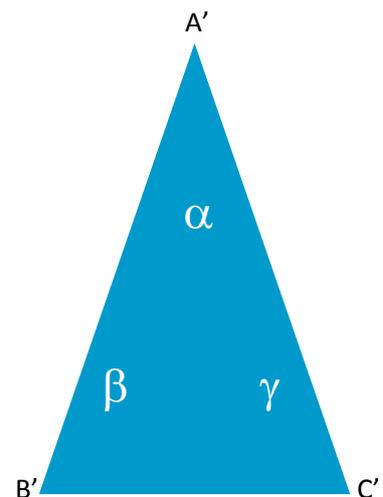
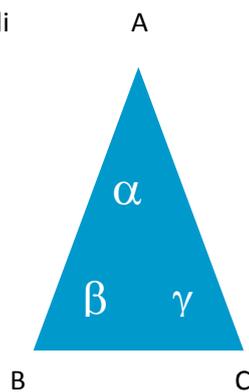
occorre soltanto ricordare che triangoli aventi angoli

ordinatamente uguali hanno il lati corrispondenti in

proporzione. Cioè:

Se  $\alpha = \alpha'$   $\beta = \beta'$   $\gamma = \gamma'$  ALLORA

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$$



### TRIANGOLO CON ANGOLI DI MISURA: 72°, 72°, 36°.

Dato un triangolo isoscele i cui angoli alla base misurano 72° ciascuno, e l'angolo

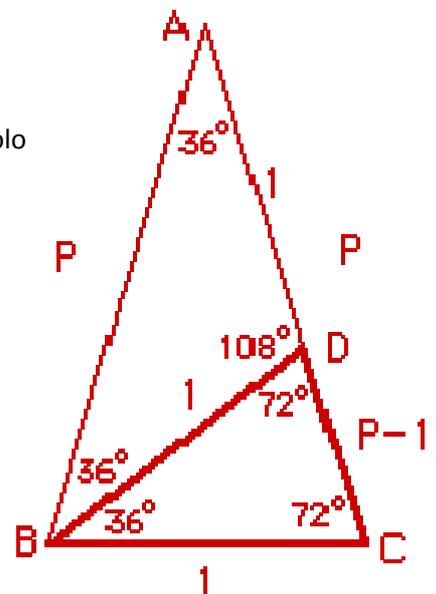
al vertice misura 36°, la bisettrice di un angolo alla base divide il lato obliquo

opposto nel punto d'intersezione in due segmenti in modo tale da creare una

sezione aurea. Infatti il triangolo ABC è simile al triangolo BCD. Per questa

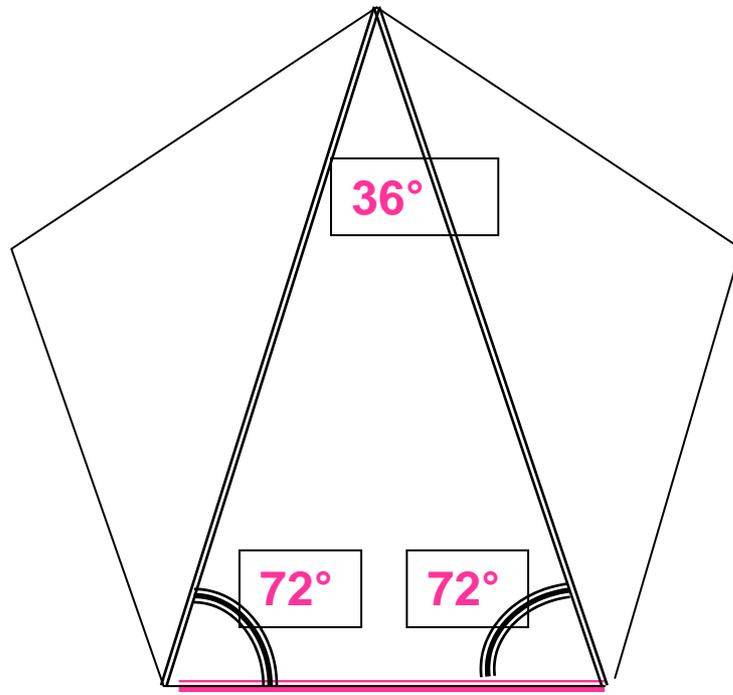
ragione risulta che: **AC:BC=BC:DC**

Ricordando che **BC=BD=AD** si ha: **AC:AD=AD:DC**

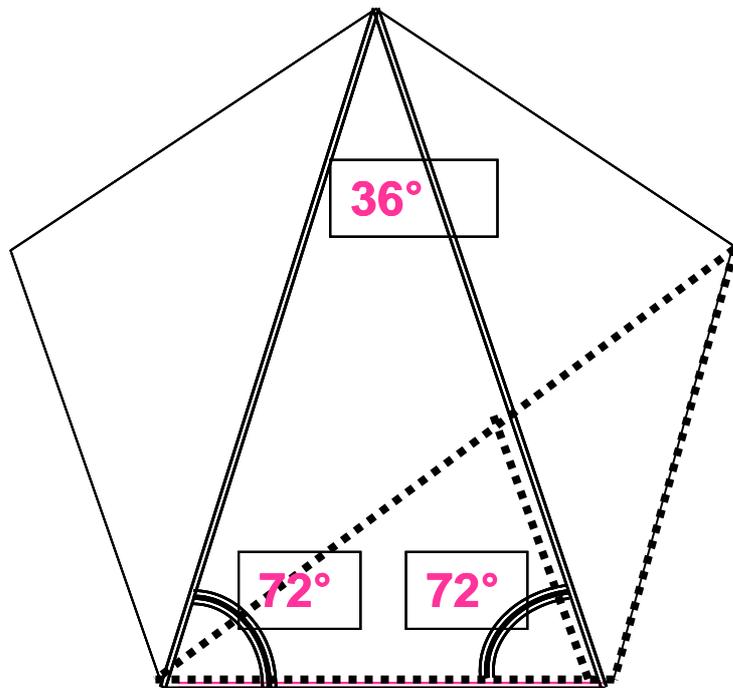


Quindi il lato di un decagono regolare (che ha un angolo al centro di  $36^\circ$ ) è la sezione aurea del raggio della circonferenza in cui esso è iscritto.

E il triangolo evidenziato sotto mostra che il lato di un pentagono regolare è la sezione aurea di una sua diagonale perché l'angolo al vertice è  $36^\circ$  e quelli alla base di  $72^\circ$  ciascuno.



Se poi si considera il **triangolo** che è possibile costruire con un'altra diagonale, non è difficile convincersi che ciascuna di esse taglia l'altra nella sua sezione aurea.



## La stella di Pitagora

Se si Tracciano le cinque diagonali si ha la realizzazione del Pentalfa, la stella di Pitagora immaginabile come l'intrecciarsi di cinque A.

Ogni diagonale ha un significato simbolico:

La punta più alta del pentagramma rappresenta la Divinità, la divina fonte della vita. **SPIRITO**

Da questa punta una linea è tracciata verso l'angolo più in basso. Questa rappresenta la discesa della vita dalla fonte divina nella sua forma più bassa e semplice di materia vivente. **TERRA**

La linea è da qui ricondotta in alto fino all'angolo superiore dx. **ACQUA**. Questa rappresenta l'ascesa della vita da una forma primitiva, attraverso il processo evolutivo, che è effettivamente partito dall'acqua, fino alla sua più alta forma fisica sul pianeta, l'essere umano.

Grandi sono le sue conquiste; ha l'adattabilità che gli deriva dal suo organo più importante: il cervello. È da esso che nascono idee sempre più complesse, più astratte, sempre più sottili come l'**ARIA**.

Però, nel suo progresso ben presto raggiunge un punto pericoloso e inizia a cadere. Per mostrare ciò la linea scende verso il basso nell'angolo dx. **FUOCO**

Questa è la storia di tutti gli imperi dell'uomo, ma poiché lo spirito umano è tutt'uno con quello divino, deve e dovrà riscattarsi e risalire per ritrovare nuovamente la fonte.

Quindi la linea del pentagramma risale in alto dall'angolo più basso direttamente alla punta più alta: lo **SPIRITO**

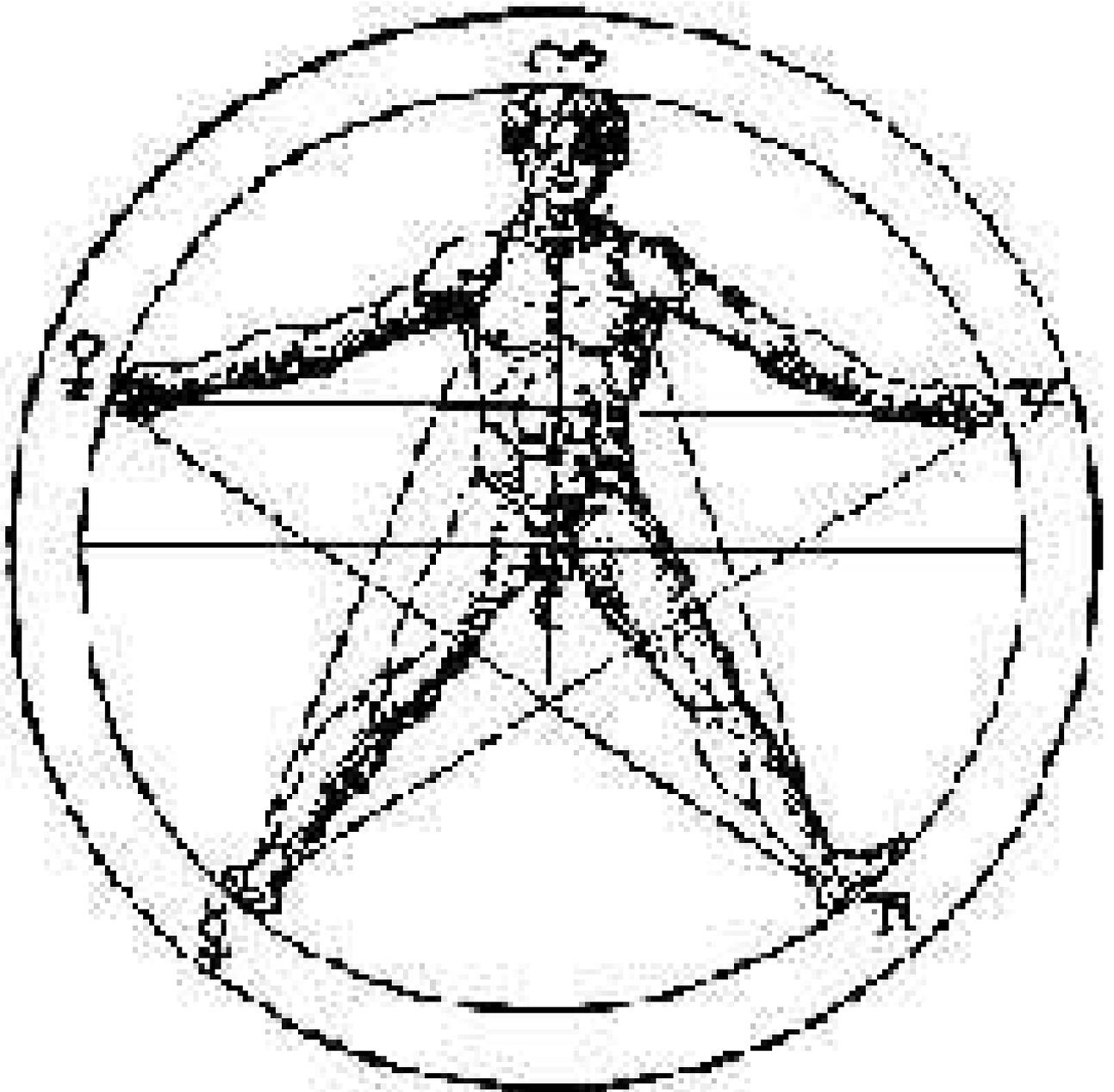


La stella di Pitagora contiene un pentagono al suo interno che può dar luogo ad un'altra stella più piccola

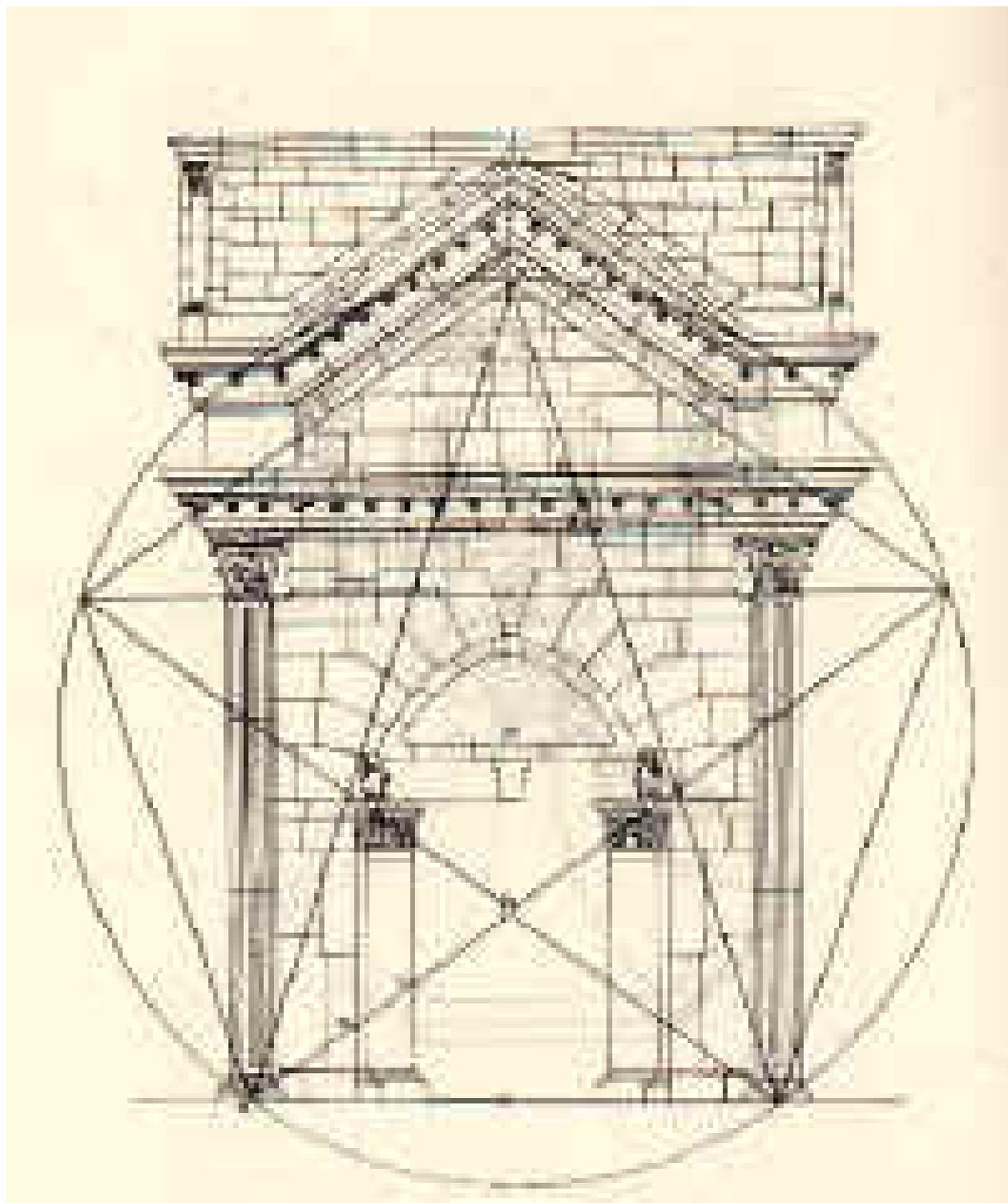
E, congiungendo invece le punte esterne si ha un pentagono più grande, al cui interno si può immaginare una stella più grande, in sintesi : sembra sia possibile intraprendere due viaggi a partire da essa.

- Verso l'infinitesimo
- Verso l'infinito

Esattamente come accade a partire dall' UOMO



Il portale di CASTEL DEL MONTE





*L'immagine scelta per concludere oltre alla pentagonale sulfina è volutamente una viola del pensiero, come simbolo di ringraziamenti per la pazienza con cui sono state accolte le povere riflessioni di questo lavoro, ma anche come omaggio a quella nostra straordinaria capacità che ci consente di sapere di esistere....*

*Ma la conclusione... come sempre, come per tutto, non è tale, perché quanto detto sul tema della “divina proportione” non è esaurito, non è esaustivo, non è esauriente, basti pensare alla musica... (anche nella Musica ritroviamo la sezione aurea: Beethoven nelle “33 variazioni sopra un valzer di Diabelli” suddivise la sua composizione in parti corrispondenti ai numeri di Fibonacci.), oppure alle peculiarità aritmetiche del numero 5,....*

*oppure basti pensare ....*

***Ecco questa è la migliore conclusione.***

***∴ Goffredo Miliacca***